Equazioni cartesiano del Moto

venerdì 24 giugno 2022 17:35

L'insieme dei punti materiali di $\mathcal{E}_3$ con i quali l'osservatore, ad un certo istante, rappresenta un corpo, si chiama <u>configurazione del corpo a quell'istante</u>.

Per descrivere il moto di un corpo dal punto di vista cinematico bisogna descrivere come varia nel tempo la sua configurazione e quindi anche la velocità e l'accelerazione dei suoi punti.

Un corpo schematizzabile con un punto si dice <u>punto materiale</u>.

- <u>EQUAZIONI CARTESIANE DEL MOTO</u>

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{3} x_i(t)\, e_i$$

Le equazioni del moto più l'insieme delle posizioni occupate da P in $\mathcal{E}_3$ al variare di t, definiscono una curva di $\mathcal{E}_3$ che viene detta <u>traiettoria</u> γ di P

- <u>Legge oraria</u>

$s = s(t)$

$s = s(t)$

~~$\mathcal{U}$~~

$$\begin{cases} s = s(t) \\ \dot{p}(t) = \dot{s}(t) \cdot t \\ \dot{a}(t) = \ddot{s}(t) \cdot t + \frac{\dot{s}^2}{R} n \end{cases}$$

$s = s(t)$

$x(t) = \dot{x}_i(t)\, e_i$

$a(t) = \ddot{x}_i(t)\, e_i$

$$V_P = V_\Omega + \omega \wedge \Omega P$$

$$a_P = a_\Omega + \dot{\omega} \wedge \Omega P + \omega \wedge (\omega \wedge \Omega P)$$

Si dice <u>atto di moto</u> di un corpo rigido, la distribuzione delle velocità dei suoi punti nello spazio di controllo e ad un dato istante

- Un atto di moto si dice <u>traslatorio</u> quando nell'istante considerato t, tutti i punti del corpo hanno la stessa velocità

$$V_P(t) = V_\Omega(t) \qquad \text{con} \quad \omega = 0$$

- Un atto di moto si dice <u>rotatorio</u> quando la legge di distribuzione delle velocità è:

$$V_P(t) = \omega(t) \wedge \Omega P$$

- Un atto di moto si dice <u>rototraslatorio</u> quando all'istante t si ha:

- Un atto di moto si dice [illegible] t si ha:

$$V_P(t) = V_\Omega(t) + \omega(t) \wedge \Omega P$$

- Un atto di moto si dice __elicoidale__ quando all'istante t si ha:

$$V_P(t) + \overbrace{\tau(t)\, c_3}^{\text{ATTO DI MOTO TRASLATORIO}} + \overbrace{(\omega(t)\, c_3 \wedge \Omega P)}^{\text{ATTO DI MOTO ROTATORIO}}$$

Nel moto elicoidale, la velocità di un punto P del corpo rigido risulta dalla __composizione__ di un atto di moto __traslatorio__ $(\tau(t)\, c_3)$ con uno __rotatorio__ $(\omega(t) c_3 \wedge \Omega P)$ avente velocità angolare istantanea $\omega(t)$ parallela alla traslazione; ossia esiste una retta (ASSE DI MOZZI) i cui punti durante il moto hanno velocità parallela alla velocità angolare ω

(Ogni atto di moto rigido è elicoidale)

Cinematica dei moti Relativi

domenica 11 febbraio 2024 16:00

- CINEMATICA DEI MOTI RELATIVI

$$V^{(a)} = V^{(r)} + V^{(\tau)}$$

$$V^{(\tau)} = V_{\Omega} + \omega \wedge \Omega P$$

$$a^{(a)} = a^{(r)} + a^{(\tau)} + a^{(c)}$$

$$a^{(\tau)} = a_{\Omega} + \dot{\omega} \wedge \Omega P + \omega \wedge (\omega \wedge \Omega P)$$

$$\omega^{(a)} = \omega^{(r)} + \omega^{(\tau)}$$

ASSE DI MOZZI :

$$CIR = A^* = C + \frac{\omega_D \wedge V_C}{|\omega_D|^2}$$

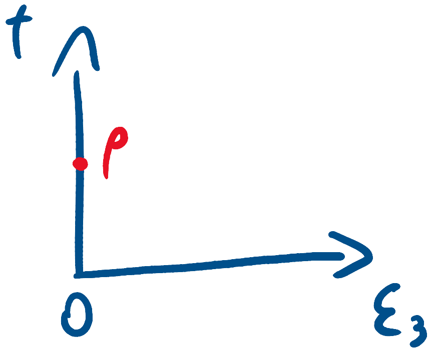
Velocità istantanea di traslazione $\rightarrow V_{A^*} = \omega_a \wedge (A^* - C)$

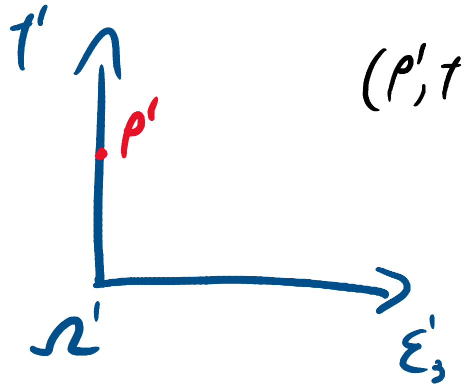
$$A(t) = K(t) + \mu e_3$$

Cambiamento di Riferimento

domenica 11 febbraio 2024 16:06

$(P,t)\in\mathcal{E}_3$





$(P',t')\in\mathcal{E}_3$

$$P = f_1(P',t')$$

$$t = f_2(P',t)$$

Bisogna trovare le relazioni tra le misure dei tempi, delle lunghezze e delle altre grandezze cinematiche effettuate da osservatori O e Ω', in moto l'uno rispetto all'altro

- $(\mathcal{E}_3, t)$ e $(\mathcal{E}'_3, t')$ Spazi-tempi dei due osservatori

Noi cerchiamo il legame tra $(P,t)\in\mathcal{E}_3$ e $(P',t')\in\mathcal{E}'_3$ che i due osservatori associano ad un medesimo evento, ovvero bisogna determinare la trasformazione invertibile

1) $P = f_1(P',t')$

2) $t = f_2(P',t')$

2): I due riferimenti sono muniti di orologi identici, pertanto in accordo col postulato: "L'andamento di un orologio è indipendente dal suo moto"

avremo che

$$t = a t' + b \qquad a, b \in R$$

se O e Ω' adottano differenti unità di misura ed origine dei tempi;

altrimenti

$$t = t'$$

se si mettono d'accordo su unità di misura ed origine dei tempi.

1) Ci occorre un postulato:

"Ad ogni istante di tempo t, la trasformazione f_1 conserva la distanza spaziale tra eventi, vale a dire che è un'isometria tra $\mathcal{E}'_3$ e $\mathcal{E}_3$"

$$d\big(f_1(A',t'),\, f_1(B',t')\big) = d(A',B') \qquad \begin{array}{l}\forall t' \in R \\ \forall A',B' \in \mathcal{E}'_3\end{array}$$

Teorema 1

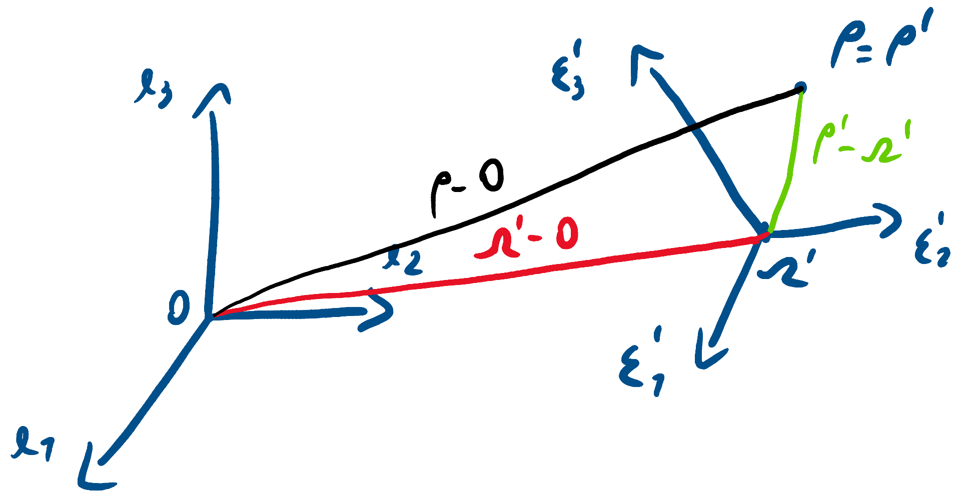
domenica 11 febbraio 2024 16:33

TEO: Ad ogni istante, f_1 è un'isometria tra $\mathcal{E}_3'$ e $\mathcal{E}_3$ se e solo se essa è del tipo

$$f_1(P') = f_1(\Omega') + Q(P'-\Omega') \quad \forall P' \in \mathcal{E}_3'$$

dove Ω' è un punto arbitrario di $\mathcal{E}_3'$ e $Q : E_3' \to E_3$ è una trasformazione ortogonale indipendente da Ω'

Questo teorema consente di trovare la relazione tra le coordinate di P' nel riferimento $\{\Omega, (\varepsilon_i')\}$ di $\mathcal{E}_3'$ e le coordinate del punto corrispondente $P = f_1(P')$ nel riferimento $\{O, (e_i)\}$ di $\mathcal{E}_3$



$$P-O = P-\Omega + (\Omega - O) = Q(P'-\Omega') + Q(\Omega'-O') =$$

$$= Q\,(x'_j\,\varepsilon'_j) + x_{\Omega_i}\,e_i =$$

$$= Q\,(\varepsilon'_j)\,x'_j + x_{\Omega_i}\,e_i =$$

$$= x'_j\,Q_{ij} + x_{\Omega_i}\,e_i$$

Dove (Q_{ij}) è la matrice che rappresenta l'applicazione $Q : E'_3 \to E_3$ nelle basi dei due osservatori Ω' ed O e per $f_1(P') = f_1(\Omega') + Q\,(P' - \Omega')$, si ha:

$$\left(f_1(P') - O\right) = \left(f_1(\Omega') - O\right) + Q\,(P' - \Omega')$$

e quindi

$$x_i\,e_i = x_{\Omega_i}\,e_i + Q\,x'_j\,\varepsilon'_j =$$

$$= x_{\Omega_i}\,e_i + x'_j\,Q_{ij}\,e_i$$

$$Q\,\varepsilon'_j = Q_{ij}\,e_i$$

Questo significa che gli elementi della j-esima colonna della matrice (Q_{ij}) sono i coseni direttori di ε_j rispetto agli assi di $\{O, (e_i)\}$

Dall'espressione precedente discendono le relazioni che cercavamo:

$$x_i = x_{\Omega_i} + Q_{ij}\,x'_j$$

La trasformazione inversa è data da:

$$Q_{ij}\, x'_j = x_i - x_{\Omega i}$$

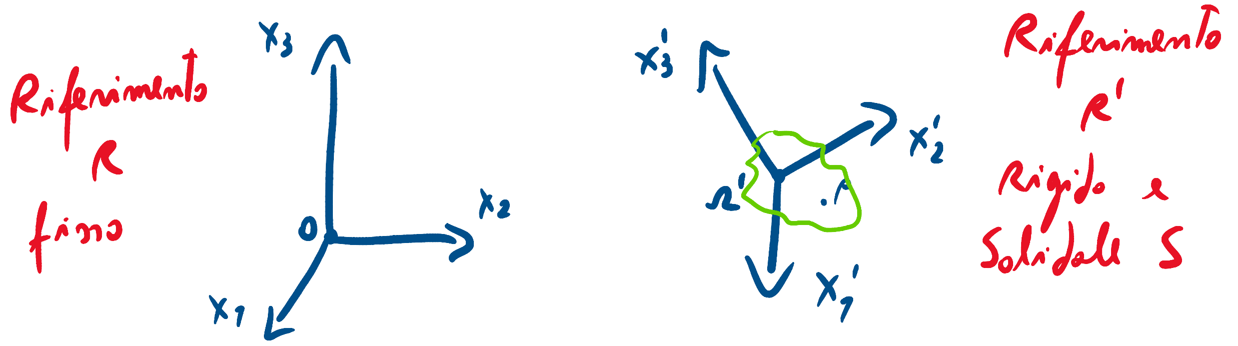
$$\Rightarrow \quad x'_j = Q^T_{ji}\, x_i - Q^T_{ji}\, x_{\Omega i} = Q^T_{ji}\, x_i + x'_{O_j}$$

$\blacksquare$

Moto di un Corpo Rigido

domenica 11 febbraio 2024 16:55

Il <u>corpo rigido</u> è un sistema di punti materiali in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare



Le equazioni del moto dei punti di S nel riferimento R sono:

$$x_i = x_{i\Omega} + Q_{ij} x'_j$$

(Legge di Trasformazione delle coordinate di un punto rispetto ai due riferimenti)

- $\{x_i(t)\}$ sono le coordinate di P, generico punto di S rispetto al riferimento fisso
- $\{x'_j\}$ coordinate rispetto al riferimento solidale di $P \in S$
- $x_{i\Omega}$ la posizione in $\{O, (e_i)\}$ dell'origine Ω
- Q_{ij} orientazione della terna solidale (ε'_i) rispetto (e_i)

• Q_{ij} orientazione della [illegible]

Q_{ij} è una matrice ortogonale che soddisfa 6 relazioni:

$$Q^T_{ik} Q_{kj} = Q_{ki} Q_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} i=j=1 \quad i=j=2 \quad i=j=3 \\ i=1, j=2 \quad i=1, j=3 \quad i=2, j=3 \end{cases}$$

Le variabili indipendenti sono 3

Occorrono 6 funzioni scalari per individuare la configurazione di S rispetto a O

FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA DI UN MOTO RIGIDO

L'atto di moto rigido all'istante t, rispetto all'osservatore O, il campo di velocità dei punti di S in moto rigido, all'istante considerato:

$$V(P,t): \quad C(t) \to V(t) \in E_3$$

$$x_i = x_{i\Omega} + Q_{ij} x'_j$$

$\Rightarrow$ "DERIVANDO RISPETTO AL TEMPO (x'_j è costante)

$$\dot{x}_i = \dot{x}_{\Omega i} + \dot{Q}_{ij} x'_j$$

Invertendo, otteniamo

$$X'_J = Q^T_{JK}\,(X_K - X_{K\Omega})$$

Dunque

$$\dot{x}_i = \dot{x}_{i\Omega} + \underbrace{\dot{Q}_{iJ}\, Q^T_{JK}}_{W_{iK}}\,(X_K - X_{K\Omega})$$

[W è un tensore velocità di rotazione

$W \overset{def}{=} \dot{Q}\,Q^T : E_3 \to E_3$ è un'applicazione antisimmetrica

$W^T = -W$]

In conclusione

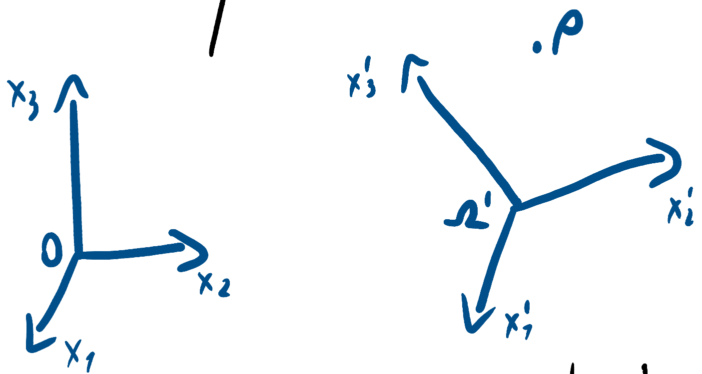
$$\dot{x}_i(t) = \dot{x}_{i\Omega} + W_{iK}\,(x_K - X_{\Omega K})$$

$$V_P = V_\Omega + W\,(P - \Omega)$$ [Formula Fondamentale]

Moti Relativi

domenica 11 febbraio 2024 23:15

Abbiamo due sistemi di riferimento R ed R' in moto rigido l'uno rispetto all'altro.
R riferimento assoluto ed R' riferimento relativo.
Si consideri un punto P



Il moto di P rispetto a O lo chiamiamo assoluto

Il moto di P rispetto a Ω' lo chiamiamo relativo

- Denotiamo con v e a la velocità e l'accelerazione assoluta considerate come vettori di E_3

Denotiamo con V_r' e V_r la velocità relativa di P considerata rispettivamente come vettore di E_3' e E_3

- La relazione tra V_r e V_r' è: $V_r = Q V_r'$ (Q è l'applicazione di Rotazione)

La relazione tra a_r e a_r' è: $a_r = Q a_r'$

L'obbiettivo è trovare qual è il legame tra V e V_r e tra a e a_r

Siano $x = x(t)$ le equazioni cartesiane finite del

Siano $x_i = x_i(t)$ le equazioni cartesiane finite del moto assoluto di P

Siano $x'_j = x'_j(t)$ le equazioni cartesiane finite del moto relativo di P

Per la legge di trasformazione delle coordinate, le equazioni del moto assoluto:

$$x_i(t) = x_{i\Omega}(t) + Q_{ij}(t)\, x'_j(t)$$

$$\Rightarrow$$

$$\dot{x}_i(t) = \dot{x}_{i\Omega} + \dot{Q}_{ij}\, x'_j + Q_{ij}\, \dot{x}'_j =$$

$$= \dot{x}_{i\Omega} + \left(\omega \wedge (P-\Omega)\right) + Q_{ij}\, \dot{x}'_j$$

$$\dot{Q}_{ij}\, x'_j = \dot{Q}_{ij} \cdot Q^T_{jk}\,(x_k - x_{\Omega k}) = \omega_{ik}\,(x_k - x_{\Omega k}) = \omega \wedge (P-\Omega)$$

Per cui

$$V = V_\Omega + \omega \wedge (P-\Omega) + Q\, v'_r$$

$$\Rightarrow V = V_\tau + V_r$$ (Principio dei moti Relativi)

$\square$

Teorema di Mozzi

lunedì 12 febbraio 2024 21:35

Dalla formula fondamentale della cinematica di un corpo rigido si ha:

$$V_P = V_\Omega + \omega(t) \wedge (P - \Omega)$$

Se $\omega(t) \neq 0$, all'istante t il luogo dei punti A, di S o solidali ad S, per i quali $V_A = \lambda(t)\,\omega(t)$, con λ scalare eventualmente nullo, è una retta $m(t)$ parallela a ω che viene detta Asse di moto o Asse istantaneo di rotazione o anche Asse di Mozzi.

Inoltre tutti i punti di quest'asse hanno ad ogni istante la stessa velocità $\tau(t)$, che viene detta velocità istantanea di traslazione.

Per dimostrare questo Teorema abbiamo bisogno di <u>due lemmi</u>

<u>Lemma 1</u>: Due punti $P_1, P_2 \in S$ o ad esso solidali hanno la stessa velocità se e solo se la retta passante per i due punti $(P_2 - P_1)$ è parallela ad ω

<u>DIM</u> (Lemma 1): Dalla formula fondamentale si ha che

$$V_{P_2} = V_{P_1} + \omega \wedge (P_2 - P_1)$$

Dunque

$$V_{P_2} = V_{P_1} \iff \omega \wedge (P_2 - P_1) = 0 \iff \omega \parallel (P_2 - P_1)$$

<u>Lemma 2</u>: Se $P_1, P_2 \in S$ (o solidali ad S) hanno la velocità parallela ad ω, allora hanno la stessa velocità e quindi la retta passante per essi è parallela ad ω

<u>DIM</u> (Lemma 2): $\underbrace{V_{P_2} - V_{P_1}}_{\parallel \omega} = \omega \wedge (P_2 - P_1)$

<u>DIM</u> (Teorema di Mozzi)

Il punto $A \in m(t)$ se e solo se $V_A \wedge \omega = 0$,

ovvero $V_A \parallel \omega$

Il che accade se: Formula Fondamentale Cinematica

$$0 = V_A \wedge \omega \overset{\downarrow}{=} V_\Omega \wedge \omega + [\omega \wedge (A - \Omega)] \wedge \omega =$$

$$= V_\Omega \wedge \omega + |\omega|^2 (A - \Omega) - [(A - \Omega) \cdot \omega]\omega$$

$= V_\Omega \wedge \omega \ldots$

Prendiamo
$$A^* = \Omega + \frac{\omega \wedge V_\Omega}{|\omega|^2}$$

Si ha:
$$\cancel{V_\Omega \wedge \omega} + \cancel{|\omega|^2} \frac{\cancel{\omega \wedge V_\Omega}}{\cancel{|\omega|^2}} - \Big[\underbrace{\left(\frac{\omega \wedge V_\Omega}{|\omega|^2} \right) \cdot \omega}_{\substack{\parallel \\ 0}} \Big] \cdot \omega = 0$$

Se ne vanno per l'antisimmetria del prodotto vettoriale

Perché $\omega \wedge V_\Omega \perp \omega$

$\Rightarrow$

Lemmi 1 e 2

$$A^* \in m(t) \Rightarrow \text{anche } A = A^* + \mu \hat{K} \in m(t)$$

$\hat{K} \stackrel{def}{=} \frac{\omega}{|\omega|}$

$\mu \in (-\infty, \infty)$

Equazione Parametrica della retta che passa per A^* e $\parallel \omega$

Ovvero luogo dei punti che hanno velocità parallela alla velocità angolare

$\blacksquare$

Invariante Scalare del moto

OSS: La quantità $\overbrace{\tau_K(t)} = V_P \cdot K$ è la stessa $\forall P \in S$.

OSS: La quantità $\tau_K(t) = V_P \cdot K$ è la stessa $\forall P \in S$ o solidale a S

DIM: $P_1, P_2 \in S$

$$w\, V_{P_2} = w\left[V_{P_1} + w \wedge (P_2 - P_1) \right]$$

$$\Rightarrow w\, V_{P_2} = w\, V_{P_1}$$

$\blacksquare$

Dinamica dei punti Materiali

lunedì 12 febbraio 2024 22:15

PRINCIPI DELLA DINAMICA (o Leggi di Newton)

1) Principio Di Inerzia: Esiste almeno un sistema di riferimento spazio-temporale nel quale ogni punto materiale isolato o è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme. Questo sistema è inerziale

2) Principio di Azione e Reazione: $F(X_A, X_B) = -F(X_B, X_A)$

3) Principio di Proporzionalità: La Forza agente su un corpo è direttamente proporzionale all' accelerazione e ne condivide la direzione e il verso, con costante di proporzionalità data dalla massa

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Inoltre la Legge di Forza è un vettore oggettivo se e solo se:

$$f(a, b, \dot{a}, \dot{b}) = -\phi_{AB}(|r|, uk)K$$

Una grandezza vettoriale è oggettiva se nel passaggio da un riferimento R ad un riferimento R' si ha che

$$\vec{w}_R = \vec{w}_{R'}$$

dove ϕ_{AB} è una funzione scalare oggettiva, $a = r_A$, Scalare aggiuntivo, $a = r_A$,

$v = r_B$, $r = a - v$, $u = \dot{a} - \dot{v}$

e $K = \dfrac{r}{|r|}$

∎

Legge del moto di Newton

martedì 13 febbraio 2024 15:38

La connessione tra il moto dei punti e le forze che esprimono le azioni che i punti esercitano gli uni sugli altri è stabilita dal seguente Postulato:

POSTULATO: Sia S un sistema isolato di n punti materiali in moto in un riferimento inerziale I.
Ad ogni punto X_A si può associare una costante positiva m_A, detta massa inerziale di X_A, che dipende solo dalla costituzione materiale del punto in questione ed è uno scalare oggettivo tale che

$$m_A \ddot{r}_A = F(X_A, X_A^c)$$

dove X_A^c è l'insieme complementare di X_A rispetto ad S

Se S è costituito da due soli punti X_1 e X_2, si ha:

$$m_1 a_1 = F(X_1, X_2) = -F(X_2, X_1) = -m_2 a_2$$

$$\Rightarrow m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0$$

Per quanto detto sopra, abbiamo dimostrato il seguente teorema:

TEOREMA: Due punti materiali in moto in un riferimento inerziale I, l'uno alla sola presenza dell'altro, hanno accelerazioni aventi la stessa direzione e verso opposto, inoltre il rapporto dei moduli delle accelerazioni coincide col reciproco del rapporto delle loro masse:

$$\frac{|a_1|}{|a_2|} = \frac{m_2}{m_1}$$

$\blacksquare$

Da questo teorema, se scegliamo di attribuire ad un punto X arbitrario massa unitaria, possiamo misurare la massa inerziale di un qualsiasi altro punto.
Se un qualsiasi punto X^* si muove in I alla sola presenza di X si ha:

$$m^* = \frac{|a|}{|a^*|}$$

$\blacksquare$

Sistemi di Punti Materiali, Equazioni Cardinali

martedì 13 febbraio 2024 15:58

Sia $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ in moto rispetto ad I, sotto l'azione di un ambiente esterno Y

Per il principio di Azione - Reazione si ha:

$$F(X_A, X_B) = - F(X_B, X_A)$$

Inoltre poiché queste forze sono parallele ad $X_A - X_B$, si ha:

$$(X_A - X_B) \wedge F(X_A, X_B) = - (X_A - X_B) \wedge F(X_B, X_A) = 0$$

Allora suddividendo le forze interne a coppie $(F(X_A, X_B), F(X_B, X_A))$ si può provare che:

$$\sum_{A=1}^{n} R_A^{(i)} = 0$$

$$\sum_{A=1}^{n} (X_A - \tilde{O}) \wedge R_A^{(i)} = 0 = M_{\tilde{O}}^{(i)}$$

Dato un vettore applicato $(X_A, \vec{w})$ ed un polo $\tilde{O}$, il vettore

$$(X_A - \tilde{O}) \wedge \vec{w}$$

si chiama momento di (X_A, w) rispetto a $\tilde{O}$

Il risultante delle forze interne e il momento risultante rispetto al polo $\tilde{O}$ di tutte le forze interne sono entrambi nulli.

Scriviamo le equazioni di Newton per ogni punto di X

$$m_A a_A = R_A^{(i)} + R_A^{(e)}$$

$$\sum_{A=1}^{n} m_A a_A = 0 + R^{(e)}$$

$$\Rightarrow \quad R^{(e)} = \sum_{A,K} F(X_A, Y_K)$$ (I equazione della meccanica nella sua prima forma)

Inoltre, da

$$\sum_{A=1}^{n} R_A^{(i)} = 0$$

moltiplicando ambo i membri per $(X_A - \tilde{O})$ e sommiamo, otteniamo:

$$\sum_{A=1}^{n} (X_A - \tilde{O}) \wedge m_A a_A = M_{\tilde{O}}^{(i)} + M_{\tilde{O}}^{(e)}$$

$$\Rightarrow \quad M_{\tilde{O}}^{(e)} = \sum_{A,\alpha} (X_A - \tilde{O}) \wedge F(X_A, Y_\alpha)$$ (II equazione della meccanica nella seconda forma)

Queste equazioni non sono sufficienti a determinare il moto di un sistema di punti materiali (tranne nel caso di punti vincolati rigidamente)

QUANTITÁ DI MOTO, MOMENTO QUANTITÁ DI MOTO E EQUAZIONI DI BILANCIO

$$Q_A = m_A V_A$$

$$\Rightarrow \quad Q \overset{def}{=} \sum_{A=1}^{n} Q_A$$

Quantità di moto totale

Derivando rispetto a t, si ha

Derivando rispetto a t, si ha

$$\dot{Q} = \sum_{A=1}^{n} m_A \cdot a_A = R^{(e)}$$ (Equazione di Bilancio della quantità di moto)

(I equazione cardinale nella sua seconda forma)

Consideriamo ora il punto G che è il baricentro di un sistema di punti materiali, si ha

$$m(G - \tilde{O}) \stackrel{def}{=} \sum_{A=1}^{n} m_A (X_A - \tilde{O})$$

Derivando membro a membro si ottiene:

$$m(V_G - V_{\tilde{O}}) = \sum_{A=1}^{n} m_A (V_A - V_{\tilde{O}}) =$$

$$= \sum_{A=1}^{n} m_A V_A - m V_{\tilde{O}}$$

$$\Rightarrow m V_G = \sum_{A=1}^{n} m_A V_A = Q$$ (I equazione cardinale nella terza forma)

e inoltre risulterà che:

$$m\, a_G = \dot{Q} = R^{(e)}$$

■

<u>Proprietà</u>: Il baricentro di un sistema di punti materiali si muove come un punto materiale di massa m sottoposto ad una forza uguale al risultante delle forze esterne.
Se il sistema di punti è isolato, il baricentro si muove di moto rettilineo uniforme o è in quiete.

■

momento della Quantità di moto del punto x_A rispetto al polo $\tilde{O}$

momento della Quantità di moto del punto x_A rispetto al polo $\tilde{O}$

$$L_{A,\tilde{O}} = (X_A - \tilde{O}) \wedge m_A V_A$$

Derivando rispetto al tempo si ha:

$$\dot{L}_{\tilde{O}} = \sum_{A=1}^{m} (X_A - \tilde{O}) \wedge m_A a_A + \sum_{A=1}^{m} (V_A - V_{\tilde{O}}) \wedge m_A V_A =$$

$$= \sum_{A=1}^{m} (X_A - \tilde{O}) \wedge m_A a_A - V_{\tilde{O}} \wedge Q = M_{\tilde{O}}^{(e)} - V_{\tilde{O}} \wedge Q$$ (II equazione nella seconda forma)

Proprietà: Se come polo si sceglie un punto fisso o il baricentro, la derivata temporale del momento angolare è ad ogni istante uguale al momento, rispetto al polo scelto, delle forze agenti su X.

Per un sistema isolato il momento angolare si conserva

Energia Cinetica

martedì 13 febbraio 2024 16:48

$$K_A \overset{def}{=} \frac{1}{2} m_A |V_A|^2$$

TEOREMA DI KONIG: L'energia cinetica K di X nel suo moto rispetto ad R è la somma dell'energia cinetica K' del moto attorno al baricentro e dell'energia cinetica che avrebbe il baricentro nel suo moto rispetto ad R, se in esso fosse concentrata tutta la massa del sistema

$$K = K' + \frac{1}{2} m |V_G|^2$$

Lavoro di un sistema di forze

$$L_{[t_0, t_1]} = \sum_{A=1}^{n} \int_{r_A(t_0)}^{r_A(t_1)} R_A \cdot dr_A$$

dove

$$\int_{r_A(t_0)}^{r_A(t_1)} R_A \, dr_A \overset{def}{=} \int_{t_0}^{t_1} R_A(r_1(t), \dots, r_n(t), \dot{r}_1(t), \dots, \dot{r}_n(t)) \, V_A(t) \, dt$$

Inoltre essendo

$$R_A \overset{def}{=} R_A^{(i)} + R_A^{(e)}$$

e

$$dr_A = V_A \, dt$$

risulta che

$$\int_{r_A(t_0)}^{r_A(t_1)} R_A \, dr_A = \int_{t_0}^{t_1} (R_A \cdot V_A) \, dt$$

$$L_{[t_0,t_1]} = \sum_{A=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} R_A \cdot V_A \, dt = L^{(i)}_{[t_0,t_1]} + L^{(e)}_{[t_0,t_1]}$$

Consideriamo l'energia cinetica e deriviamola rispetto al tempo:

$$\dot{K} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{A=1}^{n} m_A |V_A|^2\right) = \sum_{A=1}^{n} m_A a_A V_A = \sum_{A=1}^{n} R_A V_A$$

Integrando rispetto al tempo nell'intervallo $[t_0, t_1]$ si ottiene

$$K(t_1) - K(t_0) = L_{[t_0,t_1]}$$ (Teorema delle Forze Vive)

- <u>Forze Conservative e Conservazione dell'energia meccanica</u>

Si dicono posizionali forze per cui $R_A = R_A(r_1, \dots, r_n)$, Si dicono posizionali forze per cui $R_A = R_A(r_1, \dots, r_r)$, $A = 1, \dots, r$, inoltre se esiste una funzione scalare $U = U(r_1, \dots, r_r)$ detta energia potenziale, tale che

$$R_A = - \frac{\partial U}{\partial (r_A)_i}$$

Allora le forze vengono dette conservative

$$\vec{R}_A = - \nabla_{r_A} U$$

U è definito a meno di una costante additiva arbitraria

- Principio di Conservazione dell' Energia Meccanica o totale

Per un sistema in moto sotto l'azione di una sollecitazione conservativa si mantiene costante l'energia totale.

Se il lavoro fatto da una forza durante uno spostamento qualsiasi dipende solo dalla posizione iniziale e finale si dice che la forza è conservativa.

- Leggi del moto di X in un riferimento inerziale

- <u>Leggi del moto di X in un riferimento inerziale</u>

$$m_A a_A = R_A^{(e)}\left(r_A, \dot{r}_A, y_1(t), \dots, y_{m_2}(t), \dot{y}_1(t), \dots, \dot{y}_{m_2}(t)\right) +$$
$$+ R_A^{(i)}\left(r_1, \dots, r_{m_1}, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_{m_1}\right)$$

- <u>Dinamica nei riferimenti non inerziali</u>

Per il principio di Coriolis si ha che

$$a_A = a_A^{(r)} + a_A^{(\tau)} + a_A^{(c)}$$

Sostituendo nelle leggi del moto si ha

$$m_A a_A^{(r)} = R_A^{(e)} + R_A^{(i)} - m_A a_A^{(\tau)} - m_A a_A^{(c)}$$

Ricordando l'oggettività delle masse, delle forze e delle leggi di forza, si ha:

$$m_A a'^{(r)}_A = R_A^{(e)} + R_A^{(i)} \underbrace{- m_A a'^{(\tau)}_A}_{F'^{(\tau)}_A} \underbrace{- 2 m_A \omega'^{(\tau)} \wedge r'_A}_{F'^{(c)}_A}$$

Forza di trascinamento

Forza di Coriolis

Forze Apparenti

Forze
Apparenti

Baricentro, Quantità di Moto e Momento Angolare di un corpo Rigido

martedì 13 febbraio 2024 21:14

Sia S un corpo rigido. Si suppone che ad ogni sottoparte misurabile $s \subseteq S$ del corpo sia associabile uno scalare costante, oggettivo $m(s) > 0$, che è detto massa di S t.c.

$$m(s) = \int_{C'} \rho'(r')\, dr'$$

dove C' è la regione di spazio occupata da s in R' e $\rho'(r')$ è la densità di massa, che è oggettiva $(\rho(r) = \rho'(r'))$

Poi

G è il baricentro di S

1) $$m(G - O) \overset{def}{=} \int_{C'} \rho(r')\, (P - O)(r', t)\, dr'$$

Quantità di moto di S

2) $$Q \overset{def}{=} \int_{C'} \rho(r')\, v(r')\, dr'$$

Momento della quantità di moto di polo $\tilde{O}$

3) $$L_{\tilde{O}} = \int_{C'} \rho(r')\, (P - \tilde{O}) \wedge V(r')\, dr'$$

Se $\tilde{O} \in S$ (O è solidale ad esso), si ha:

$$L_{\tilde{O}} = \int_{C'} \rho(r')\, (P - \tilde{O}) \wedge (V_{\tilde{O}} + \omega \wedge (P - \tilde{O}))\, dr' =$$

$$= m(G - \tilde{O}) \wedge V_{\tilde{O}} + \underbrace{\int_{C'} \rho(r')\, |P - \tilde{O}|^2 \omega\, dr' - \int_{C'} \rho(r') [(P - O)\, \omega] (P - \tilde{O})\, dr'}_{= I_{\tilde{O}} \text{ Tensore d'inerzia}} =$$

$$= m(G-\tilde{O}) \wedge V_{\tilde{O}} + \int_{C'} \rho(r') |P-\tilde{O}|^2 w \, dr' - \int_{C'} \rho(r') [(P-O) w](P-O) \, dr' =$$

$$= m(G-\tilde{O}) \wedge V_{\tilde{O}} + I_{\tilde{O}}(w)$$

Se si prende come polo il baricentro G :

$$I_{\Omega, ij} = \int_{C'} \rho(r') \left[(x_k - x_{\Omega k})^2 \delta_{ij} - (x_i - x_{\Omega i})(x_j - x_{\Omega j}) \right] dr'$$

Rappresentano i 9 elementi della matrice associata rispetto alla base

$\Rightarrow$

$$I_{\Omega, ij} = \int_{C'} \rho(r') \left[Q_{kl} x'_l \, Q_{km} x'_m \, \delta_{ij} - Q_{il} x'_l \, Q_{jm} x'_m \right] dr' =$$

$$= Q_{il} \left\{ \int_{C'} \rho(r') \left((x'_k)^2 \cdot \delta_{lm} - x'_l x'_m \right] dr' \right\} Q_{jm} =$$

$$= Q_{il} \cdot I'_{\Omega, lm} \cdot Q_{jm}$$

I_Ω è il tensore d'inerzia di S rispetto al polo Ω

$\Rightarrow$

$$I_{\Omega, ij} = Q_{il} \, I'_{\Omega, lm} \, Q^T_{mj} = Q_{il} \, I'_{\Omega, lm} \, Q^{-1}_{mj}$$

Se come polo si sceglie il baricentro, il momento angolare relativo ad R coincide con L''_G, che denota il momento angolare, di polo G, del sistema S nel suo moto attorno angolare, di polo G, del sistema S nel suo moto attorno al baricentro:

$$L_G : L''_G = I_G(\omega)$$

Più in generale, per un qualsiasi $\tilde{O}$ si ha:

$$L_{\tilde{O}} = L''_{\tilde{O}} + (G - \tilde{O}) \wedge m V_G$$

Infatti

$$L_{\tilde{O}} = \int_{C'} \rho (P - \tilde{O}) \wedge (v'' + V_G) \, dr' = L''_{\tilde{O}} + (G - \tilde{O}) \wedge m V_G =$$

$$= L_G + (G - \tilde{O}) \wedge m V_G$$

- Energia Cinetica di un corpo rigido

$$K = \frac{1}{2} \int_{C'} \rho(r') \, |v(r')|^2 \, dr' = \frac{1}{2} \int_{C'} \rho \, (\omega \wedge (P - O)) \cdot (\omega \wedge (P - O)) \, dr' =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_{C'} \rho \, (P - O) \wedge (\omega \wedge (P - O)) \, dr' \right\} \omega =$$

$$= \frac{1}{2} \omega \, L_O = \frac{1}{2} \omega \, I_O(\omega)$$

Il teorema di Konig vale anche per un generico moto rigido di un corpo:

rigido di un corpo:

$$K = \frac{1}{2} \int_{C'} \rho \, |v(r')|^2 \, dr' = \frac{1}{2} \int_{C'} \rho \, (v''(r') + v_G) \cdot (v''(r') + v_G) \, dr' =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{C'} \rho \, |v''(r')|^2 \, dr' + \frac{1}{2} m |v_G|^2 + \overbrace{v_G \cdot Q''}^{=0} =$$

$$= \frac{1}{2} m |v_G|^2 + K''$$

dove

$$K'' = \frac{1}{2} w \, I_G(w)$$ (Energia cinetica del moto attorno al baricentro)

e

I_G è il tensore centrale d'inerzia (La matrice rappresentativa di I_G in un riferimento solidale è costante)

Proprietà di I_G: È un'applicazione simmetrica e definita positiva, vale a dire che $\forall\, u, w \in E_3$ si ha:

- $u \cdot I_G(w) = w \cdot I_G(u)$
- $u \cdot I_G(u) \geq 0$

Una base ortonormale di autovettori di I_G è naturalmente fissa rispetto ad S. Sia (u_i) una tale base, che viene detta base centrale d'inerzia; siano A, B, C gli autovalori di I_G e p, q, r le componenti di w rispetto a tale base, allora si ha:

autovalori di I_G e p, q, r le componenti di ω rispetto a tale base, allora si ha:

$$L'' = I_G(\omega) = A p \, u_1 + B q \, u_2 + C r \, u_3 = L_0$$

$$K'' = \frac{1}{2}\left(A p^2 + B q^2 + C r^2\right) = K$$

$\blacksquare$